

Révisions d'été

1 Introduction

Bonjour à tou.te.s et bienvenue dans ce poly de révisions d'été en vue de votre rentrée en Classe Préparatoire ECG en septembre.

Ce polycopié s'organise en deux parties : une première partie de rappels succincts de cours, auxquels vous pourrez vous référer au besoin ; une seconde partie contenant une liste d'exercices à traiter, en fonction de votre future spécialité (Mathématiques Appliquées ou Mathématiques Approfondies).

Nous vous conseillons d'aborder toutes les parties relatives à votre option de Maths, sans forcément réaliser tous les exercices de chaque partie, mais de vous attarder particulièrement sur les parties qui vous posent problème. Si vous rencontrez des difficultés, signalez-le nous dès la rentrée afin que nous puissions y remédier ensemble rapidement.

Bon été à tou.te.s, et à bientôt,

vos futurs professeurs de mathématiques,
E. Tezenas et N. Caillerie.

2 Rappels de cours

2.1 Manipulation de fractions

Pour a, b, c, d des réels, avec $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$,

- $a = \frac{a}{1}, \quad c \times \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b}, \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

- (*Simplification*) $\frac{c \times a}{c \times b} = \frac{a}{b}$ *ATTENTION* $\frac{c+a}{c+b} \neq \frac{a}{b}$ en général

- (*Addition*) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ *ATTENTION* $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$

- (*Produit*) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

- (*Fractions de fractions*) $\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ et $\left(\frac{a}{b}\right) \frac{1}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$

On retiendra que diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse.

2.2 Identités remarquables

Soient a et b des nombres réels, on a les formules suivantes :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

2.3 Puissances

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$
 $x^0 = 1$, $x^1 = x$, et $x^n = x \times \dots \times x$ (n facteurs)

Formulaire de calcul sur les puissances :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $m, n \in \mathbb{N}$:

- $x^n \times x^m = x^{n+m}$
- $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
- $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ si $x \neq 0$

Remarque : cette formule permet de définir x^k si k est un entier négatif.

- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

2.4 Racine carrée

La racine carrée est définie sur les réels positifs, et vérifie les règles de calculs suivantes :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$
- $\sqrt{a+b} = \text{ATTENTION, pas de formule générale!}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour $a \geq 0$ et $b > 0$
- $\sqrt{a^2} = a$ pour tout $a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$
- $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b$

Remarque : on dit qu'on a "multiplié $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ par l'expression conjuguée".

Remarque : on a, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

2.5 Exponentielle et Logarithme

Les fonctions exponentielles et logarithme seront définies proprement au cours de l'année. On rappelle ici les opérations de calcul classiques liées à ces fonctions.

- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- donc $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$ pour tous $b \in \mathbb{R}$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{a \times n}$
- $e^0 = 1$

Le logarithme est défini pour des x strictement positifs.

- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- donc $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n \ln(a)$

- $\ln(1) = 0$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$

Attention à la condition sur x !

- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x.$

2.6 Dérivation

Ce tableau regroupe les dérivées usuelles pour des fonctions réelle. \mathcal{D}_f est le domaine de définition de la fonction f , $\mathcal{D}_{f'}$ le domaine de définition de la dérivée f' .

| $f(x)$ | \mathcal{D}_f | $f'(x)$ | $\mathcal{D}_{f'}$ |
|---------------------------------------|------------------|-----------------------|--------------------|
| a | \mathbb{R} | 0 | \mathbb{R} |
| $ax + b$ | \mathbb{R} | a | \mathbb{R} |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^*$ | \mathbb{R} | $\alpha x^{\alpha-1}$ | \mathbb{R} |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}_-^*$ | \mathbb{R}^* | $\alpha x^{\alpha-1}$ | \mathbb{R}^* |
| $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ | \mathbb{R}_+^* | $\alpha x^{\alpha-1}$ | \mathbb{R}_+^* |
| $\frac{1}{x}$ | \mathbb{R}^* | $-\frac{1}{x^2}$ | \mathbb{R}^* |
| \sqrt{x} | \mathbb{R}_+^* | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | \mathbb{R}_+^* |
| $\ln(x)$ | \mathbb{R}_+^* | $\frac{1}{x}$ | \mathbb{R}_+^* |
| e^x | \mathbb{R} | e^x | \mathbb{R} |
| $\cos(x)^*$ | \mathbb{R} | $-\sin(x)$ | \mathbb{R} |
| $\sin(x)^*$ | \mathbb{R} | $\cos(x)$ | \mathbb{R} |

* seulement pour les futur·e-s élèves en maths approfondies.

On rappelle également les règles de calcul sur les dérivées :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de \mathbb{R} , λ un réel, n un entier.

- (Somme) La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$
- (Multiplication par un réel) La fonction λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda \times u'$
- (Multiplication) La fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$

- (*Produit*) La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable pour les $x \in I$ tels que $v(x) \neq 0$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- (*Puissance*) La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$
- (*Composition de fonction*) Si pour tout $x \in I$, $v(x) \in \mathcal{D}_u$, alors la fonction $u \circ v$ est dérivable sur I et $(u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \times v'(x)$

2.7 Trigonométrie (seulement pour les futur·e·s élèves en maths approfondies)

Valeurs remarquables de cosinus et sinus à connaître :

| | | | | | | | |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|--------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π | 2π |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 | 1 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | 0 |

Tangente : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour tout x tel que $\cos x \neq 0$.

3 Exercices

Les exercices, réponses et corrigés sont accessibles à cette adresse :

https://colasbd.github.io/cdc/cahier_de_calcul_v13.pdf

Nous vous recommandons de télécharger ce document et de le garder précieusement, vous pourrez aussi l'utiliser pour vous entraîner durant l'année.

Liste des parties à aborder pour les Mathématiques Appliquées :

- 1. Fractions : de 1.1 à 1.3, puis 1.6, 1.9 et 1.10.
- 2. Puissances : de 2.1 à 2.5.
- 3. Calcul littéral : de 3.1 à 3.6.
- 4. Racine carrée : de 4.1 à 4.7.
- 7. Exponentielle et Logarithme : de 7.1 à 7.6.
- 9. Dérivation : de 9.1 à 9.7 *Remarque : on sautera les questions faisant intervenir les fonctions cos et sin, hors-programme de Maths Appli.*

Liste des parties à aborder pour les Mathématiques Approfondies :

- 1. Fractions : de 1.1 à 1.3, puis 1.6, 1.9 et 1.10.
- 2. Puissances : de 2.1 à 2.5.
- 3. Calcul littéral : de 3.1 à 3.6.
- 4. Racine carrée : de 4.1 à 4.7.
- 7. Exponentielle et Logarithme : de 7.1 à 7.6.
- 8. Trigonométrie : 8.1 et 8.2
- 9. Dérivation : de 9.1 à 9.7.
- 15. Systèmes linéaires : 15.1.