Document de préparation aux mathématiques pour la rentrée en Spé PC

F.Bès

1 Principe

Ce document est un recueil d'une vingtaine d'exercices d'application directe du cours, avec indications et conseils. Ces exercices vous permettront de réviser quelques techniques et raisonnements classiques de SUP qu'il est **indispensable de connaître pour bien aborder l'année de SPÉ**.

Voici la démarche à adopter :

- a) **Faire tous les exercices avant la rentrée en PC**, si besoin en vous aidant des conseils et indications en Partie 3, et en vous reportant bien sûr à votre cours de SUP,
- b) **Apprendre par coeur les théorèmes utilisés** pour faire ces exercices (ils sont cités dans les indications),
- c) Revoir les cours correspondant aux exercices qui vous ont posé des difficultés.
- d) Envoyer un mail à l'adresse francis.bes@lycee-berthollet.com à *partir du 26 Août*, pour recevoir en retour un corrigé de ces exercices. Pour écrire ce mail, ne pas oublier de remplir l'entête, de mettre vos nom et prénom, votre provenance (classe de SUP).

2 Exercices

2.1 Changement d'indice dans les sommes

Compléter les formules suivantes en effectuant le bon changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{\dots} a_{\dots} x^j \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} a_{k+1} x^k = \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{\dots} x^{2j}$$

2.2 Sommes géométriques

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n 3 \times 4^k, \quad S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k}, \quad S_3 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1} 3^{k-1}}$$

2.3 Sommes télescopiques

Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=0}^n (a_k - a_{k+1}), \quad S_2 = \sum_{k=1}^n (a_{k+2} - a_k), \quad S_3 = \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1})$$

2.4 Limites usuelles

Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{3/x}$.

2.5 Utilisation des croissances comparées

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 1)e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{\ln x}}$.

2.6 Suites arithmético-géométriques

a) Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 2$$

b) Faire de même avec la suite (v_n) définie par $v_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = -v_n + 4$$

2.7 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

a) Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1, u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

b) Faire de même avec la suite (v_n) définie par : $v_0 = 1, v_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$$

2.8 Manipulation de graphe de fonctions

Tracer le graphe de $x \mapsto \ln x$ et en déduire celui des fonctions suivantes

$$(a) x \mapsto \ln(1+x) \quad (b) x \mapsto 2 - \ln x \quad (c) x \mapsto 1 + \ln(x-1) \quad (d) x \mapsto \ln|x|$$

2.9 Utilisation de la relation de comparaison d'équivalence

Donner un équivalent simple de $u_n = \frac{\ln(1+n^{-2})}{n \sin(1/n)}$ et $v_n = \frac{2^n}{n^2 + 3^{n+1}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

2.10 Lien entre dérivation et intégration

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

$$g(x) = \int_x^0 f(t)dt, \quad h(x) = \int_1^x f(t)dt \quad \text{et} \quad k(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

Déterminer leurs dérivées en fonction de f .

2.11 Obtention de primitives usuelles

Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$, de $g : x \mapsto \frac{x}{(x^2 + 1)^3}$ sur $\mathbb{R}$, puis de

$$h : x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)} \quad \text{sur} \quad]1, 2[.$$

2.12 Dérivée de fonctions usuelles

- Soit t un réel strictement positif. Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de $u : x \mapsto t^x e^t$.
- Calculer la dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$ de $v : x \mapsto x^{1/x}$.

2.13 Inégalités classiques

En utilisant la notion de fonction convexe (ou concave) montrer que

$$\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

2.14 Equations différentielles linéaires

Résoudre les équations différentielles linéaires :

- $y' = ay + b$ en fonctions des constantes réelles a et b .
- $y'' + ky = 0$ pour $k \in \{-1, 0, 1\}$.
- $y'' + 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- $y'' + 4y' + 4y = 1$ sur $\mathbb{R}$.

2.15 Calcul avec les complexes

- Déterminer les solutions complexes de $z^4 = 1$, puis celles de $z^5 = z$.
- Faire de même avec $z^3 = -8i$.

2.16 Sev/App.linéaire/Endomorphisme

- a) Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}_3[X]$.
b) Montrer que $g : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P - XP''$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2.17 Image et noyau d'un endomorphisme

- a) Déterminer le noyau puis le rang de l'endomorphisme $D : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P' \in \mathbb{R}_n[X]$.
b) Montrer qu'une forme linéaire non nulle est de rang 1.

2.18 Mise sous forme de Vect

- a) Mettre $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = z - 2x = 0\}$ sous forme de sous-espace vectoriel engendré. En déduire une base de F et sa dimension.
b) Faire de même avec $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + t = 2z + t = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]; P(1) = 0\}$.

2.19 Matrice d'une application linéaire

- a) Déterminer la matrice de l'application linéaire

$$f : (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x + y - 2z, z - t, x + z) \in \mathbb{R}^3$$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.

- b) Faire de même avec l'endomorphisme $g : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P - XP'' \in \mathbb{R}_2[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que g est bijectif.

2.20 Probabilité

Une pièce A donne *face* avec une probabilité $1/2$ et une pièce B donne *face* avec une probabilité $2/3$. On choisit une pièce au hasard, on la lance et si on obtient *face*, on conserve la pièce que l'on vient de lancer sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir *face* au 1er lancer ? Au 2e lancer ?

2.21 Variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé (Ω, P) , telles que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et Y suit une loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, et supposées indépendantes. On définit $Z = XY$.

Déterminer dans l'ordre : $Z(\Omega)$, la loi de Z , $P((Z = 0) \cup (Y = 1))$, l'espérance et la variance de Z .

3 Conseils et indications

3.1 Changement d'indice dans les sommes

Ne pas hésiter à se donner des repères du type $j = k - 1$, si $k \in \{\dots\}$ alors $j \in \{\dots\}$.

3.2 Sommes géométriques

Revoir la **formule de calcul de la somme des premiers termes d'une suite géométrique**, bien faire attention au premier terme de la somme.

3.3 Sommes télescopiques

Dans un premier temps on pourra développer la somme en utilisant des points, on pourra aussi utiliser des changements d'indice.

3.4 Limites usuelles

Passage obligé par la fonction exponentielle pour ces limites avec utilisation des équivalents ensuite (attention de ne pas composer un équivalent avec $\exp$) ou bien avec utilisation de DL.

3.5 Utilisation des croissances comparées

Connaître par coeur les résultats de **croissances comparées** entre fonction $\ln$, puissance et $\exp$ et savoir les appliquer directement ou par changement de variable.

3.6 Suites arithmético-géométriques

Revoir la méthode correspondant à ces suites, attention à la deuxième suite dont le 1er terme est v_1 et non v_0 .

3.7 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Revoir les **théorèmes correspondants aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2**, ne pas confondre avec les résultats sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes, à coefficients constants.

3.8 Manipulation de graphe de fonctions

Les graphes des fonctions usuelles sont à connaître, ainsi que leurs propriétés, notamment celui de la fonction $\ln$.

3.9 Utilisation de la relation de comparaison d'équivalence

Bien revoir les définitions des relations de comparaison $o, O, \sim$, le formulaire des équivalents ainsi que les techniques usuelles sur les équivalents : produit, quotient mais pas de somme ou de composition (sauf dans certains cas très restreints).

3.10 Lien entre dérivation et intégration

Ce lien est fait avec le **théorème fondamental de l'intégration** (ou de l'analyse) qu'il est indispensable de connaître par coeur.

3.11 Obtention de primitives usuelles

Il est souvent utile pour la recherche de primitives de reconnaître des fonctions de la forme $u' \times u^\alpha$ dont une primitive est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $\ln|u|$ si $\alpha = -1$.
Pour une fonction rationnelle (quotient de 2 polynômes), penser à décomposer en éléments simples.

3.12 Dérivée de fonctions usuelles

Attention de dériver par rapport à la bonne variable et d'utiliser le formulaire de dérivation des fonctions à bon escient.

3.13 Inégalités classiques

Le graphe d'une fonction convexe (resp. concave) est au dessus (resp. en-dessous) de ses tangentes et en-dessous (resp. au dessus) de ses cordes.

3.14 Equations différentielles linéaires

Revoir les **théorèmes** et techniques sur les EDL1 et 2.

3.15 Calcul avec les complexes

Revoir la notion de racine n -ième de l'unité. L'utilisation de la forme exponentielle peut-être un réel avantage pour la résolution d'équations avec des complexes.

3.16 Sev/App.linéaire/Endomorphisme

La confusion entre sev et linéarité d'une application est à éviter absolument. Les deux définitions (ou caractérisations) sont à connaître par coeur.

3.17 Image et noyau d'un endomorphisme

Ces deux notions d'image et de noyau doivent être maîtrisées : définitions, propriétés et bien sûr le **théorème du rang**.

3.18 Mise sous forme de Vect

Technique usuelle qu'il faut connaître car elle permet de montrer qu'un ensemble est un sev et en plus de déterminer une famille génératrice de ce sev, ce qui fera un bon candidat pour une base. Ne pas oublier de vérifier que les vecteurs obtenus ont des coordonnées qui vérifient bien les équations du sev.

3.19 Matrice d'une application linéaire

Cela ne doit pas être fait au hasard mais en utilisant les repères $f(e_1), \dots, f(e_n)$ et $e_1, \dots, e_n$ autour de la matrice. Pour montrer la bijectivité d'un endomorphisme, on peut regarder l'inversibilité de sa matrice dans une base donnée.

3.20 Probabilité

On pourra faire intervenir les événements F_k : "obtenir face au k -ième lancer" et A_k : "lancer la pièce A au k -ième lancer" et utiliser la **formule des probabilités totales** avec un système complet d'événements bien choisi.

Un bon exercice (un peu plus dur) est une généralisation avec la recherche de $P(F_k)$ pour un entier naturel non nul k quelconque : on obtient une relation de récurrence liant $P(A_{k+1})$ et $P(A_k)$ aboutissant à une suite arithmético-géométrique.

3.21 Variables aléatoires

C'est l'occasion de revoir les définitions d'espace probabilisé, de variable aléatoire, les lois usuelles, l'indépendance, l'espérance et la variance.